

Zaurdougue
Un max de math

Image de l'exponentielle sur $M_n(\mathbb{C})$

Thm : $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Prop 1: $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$

Preuve: $GL_n(\mathbb{C})$ est un rev de $M_n(\mathbb{C})$. Il est donc fermé, d'où $\exp(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{C})$

Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$. Notons $E = (GL_n(\mathbb{C}))^\times$.

Prop 2: $GL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}) = E$

Soit $\lambda \in GL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$

Alors $\lambda^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ (thm de Cayley-Hamilton)
 $\in GL_n(\mathbb{C})$

d'où $\lambda \in E$.

Donc $GL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}) \subset E$

La réciproque est évidente. D'où $E = GL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$.

On a que $\exp: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow E$ est un morphisme de groupes

Prop 3: E est un ouvert connexe de $GL_n(\mathbb{C})$:

On a $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ donc $E = GL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert de $GL_n(\mathbb{C})$.

Raisons que E est connexe par arcs

Soit $N \in E$. On veut $t \mapsto \gamma(t)$ tel que

$$N\gamma(t) = \gamma(t)I_n + (1-\gamma(t))N \text{ relie } I_n \text{ à } N \text{ dans } E,$$

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(1) = 1$$

Comme $\gamma \mapsto \det(N\gamma)$ est polynômiale en γ ,
on a $N\gamma = \gamma I_n + (1-\gamma)N$, et $\det(N\gamma) = N \neq 0$,
il a un nb fini de zéros et on peut construire un
chemin $\gamma(t)$ qui ne passe pas par un zéro de
 $\det(N\gamma)$

On a alors
d'où

$N\gamma(t) = \gamma(t)I_n + (1-\gamma(t))N$ convient
 E est connexe par arcs.

Remarque: On
montre que E
est un
ouvert pour donner
sens à la Prop
4
(thm d'inversion,
tout ça).

Prop 4: $\exp(\mathcal{G}(C))$ contient un voisinage de I_n dans E . $\exp(\mathcal{G}(C))$ est ouvert dans E .

Preuve: On rappelle que $d\exp|_0 = \text{Id}_{\mathcal{G}_m(C)}$.
Donc la différentielle de $\exp$ restreinte à $\mathcal{G}_m(C)$

$\mathcal{G}(C)$ est $\text{Id}_{\mathcal{G}(C)}$. Le thm d'inversion locale permet de conclure $\exp: U \rightarrow V$ difféo ($0 \in U, I_n \in V$)

Soit $A \in \mathcal{G}(C)$. $\exp(A+U) = \exp(A)\exp(U) = \exp(A)V$.

On $\exp(A) \in E$ donc $\Pi \mapsto \exp(A)\Pi$ est un homéo.
donc $\exp(A)V$ est un voisinage de $\exp(A)$ dans $\mathcal{G}(C)$ inclus dans $\exp(\mathcal{G}(C))$.

D'où $\exp(\mathcal{G}(C))$ est ouvert dans E .

Prop 5: $\exp(\mathcal{G}(C)) = E$.

Preuve: Montrons que $\exp(\mathcal{G}(C))$ est fermé dans E .

$$E \setminus \exp(\mathcal{G}(C)) = \bigcup_{A \in \mathcal{G}(\exp(\mathcal{G}(C)))} A \exp(\mathcal{G}(C))$$

(double inclusion facile)

D'où $E \setminus \exp(\mathcal{G}(C))$ ouvert d'où

$\exp(\mathcal{G}(C))$ est fermé.

Il est fermé ouvert dans E connexe d'où
 $\exp(\mathcal{G}(C)) = E$ (car $\exp(\mathcal{G}(C)) \neq \emptyset$).

Preuve du thm: Soit $C \in \mathcal{G}_m(C)$,
alors $C \in E = \exp(\mathcal{G}(C))$.